MATRICE I DETERMINANTE

- **DEFINICIJA MATRICE**

Matricom tipa m × n zovemo tabelu od m × n realnih brojeva a_{ij}, i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n zapisanih u obliku pravougaone šeme. Brojeve a_{ij} zovemo **elementima** matrice, a odgovarajuću matricu označavamo sa $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ili $A_{m\times n}$, tj.

Vrste

$$A_{m\times n} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kolone

Neki tipovi matrica

- Matricu čiji su svi elementi nule, zovemo **nula matricom** i označavamo sa 0.
- Za matricu tipa $m \times n$ kažemo da je **trapezna** (za $m = n$ - trougaona) ako ima sledeću osobinu: ako se u nekoj vrsti prvi nenulti element nalazi na k-tom mjestu (tj. u k-toj koloni), $k = 1,2,...,m-1$, onda su na prvih k mjesta sledeće vrste svi elementi nula.

PRIMJER

- Matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

je trapezna.

Neki tipovi matrica

- Za matricu čiji je broj vrsta jednak broju kolona ($m = n$) kažemo da je **kvadratna**, reda n. Elementi a_{ii}, $i = 1,...,n$ kvadratne matrice obrazuju **dijagonalu**. Kvadratnu matricu čiji su svi elementi van dijagonale nule zovemo **dijagonalnom**, a dijagonalnu matricu čiji su elementi dijagonale jedinice - **jediničnom**.

Primjeri

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

dijagonalna

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jedinična

- Za matrice i kažemo da su **jednake** ako su im jednaki odgovarajući elementi:
- $a_{ij} = b_{ij}$,   i = 1,...,m;   j = 1,...,n
- PRIMJER: Matrice

$$A = \begin{bmatrix} a+b & 4 & x \\ 2 & 1 & y \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & x \\ 2 & a-b & y \end{bmatrix}$$

su istog tipa (2 × 3) (pa ima smisla govoriti o njihovoj jednakosti).

A = B   za   a = 2   i   b = 1.

Za dvije matrice istog tipa definišemo njihov **zbir** kao matricu čiji su elementi zbirovi odgovarajućih elemenata tih matrica.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 0+3 \\ 2+1 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Za matricu čiji su elementi - elementi matrice A sa suprotnim znakom kažemo da je **suprotna** matrici A i označavamo je sa (-A).

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow -A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

Za dvije matrice istog tipa definišemo **razliku** kao matricu čiji su elementi razlike odgovarajućih elemenata tih matrica.

$$A-B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2 & 0-3\\ 2-1 & 1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Proizvodom matrice $\left[\mathbf{a}_{\mathbf{ij}}\right]_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ i realnog broja k zovemo matricu $\left[ka_{ij}\right]_{m\times n}$.

Primjer

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow 5A=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 10 & 5\end{bmatrix}$$

Ako je A matrica tipa m × p i B matrica tipa p × n definišemo **proizvod A · B matrice A matricom B** kao matricu C tipa m × n čiji su elementi

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}$$

Primjer

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

su tipa 2 × 3 odnosno 3 × 3 pa je definisan i proizvod A×B kao matrica tipa 2 × 3 i

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \boxed{3\cdot1+1\cdot2+0\cdot3} & \boxed{3\cdot2+1\cdot0+0\cdot5} & \boxed{3\cdot3+1\cdot1+0\cdot4} \\ \boxed{1\cdot1+2\cdot2+1\cdot3} & \boxed{1\cdot2+2\cdot0+1\cdot5} & \boxed{1\cdot3+2\cdot1+1\cdot4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 6 & 10 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

- Za matricu A^T kažemo da je **transponovana** matrica matrice A, ako su vrste matrice A kolone matrice A^T i obrnuto.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

DETERMINANTE

Kvadratnoj matrici reda n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

pridružujemo realan broj - **determinantu reda n** koji označavamo sa det A ili

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinantu određujemo **“razvijanjem po prvoj koloni”**, tj. po pravilu:

- Za n = 1: $A = \left[a_{ij}\right] \Rightarrow \det A = \left|a_{11}\right| = a_{11}$

Za n > 1:

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + \left(-1\right)^{n+1} a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Primjeri

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -78$$

Sledeće pojmove: element, vrsta, kolona, dijagonala determinante, trougaona i dijagonalna determinanta, definišemo kao i odgovarajuće pojmove za matricu, odnosno za kvadratnu matricu.

Iz definicije slijedi da je vrijednost dijagonalne, a takođe trougaone determinante, jednaka proizvodu elemenata dijagonale.

Ispuštanjem vrste i kolone kojoj pripada element a_{ij} determinante matrice $\left[a_{ij}\right]$ reda n dobija se determinanta reda n – 1. Tu determinantu zovemo **minorom** elementa a_{ij}.
Proizvod minora elementa a_{ij} i broja $(-1)^{i+j}$ zovemo **algebarskim komplementom** elementa a_{ij}.
Na ovaj način determinanta se može definisati

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1}$$

Primjeri

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Osobine determinanti

1. Vrijednost determinante se ne mijenja ako sve vrste zamijenimo odgovarajućim kolonama

Dokaz (n=2)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Na osnovu ove osobine, u definiciji kao i u osobinama determinante izrazi “vrsta” mogu biti zamijenjeni izrazima “kolona” i obrnuto. Tako, na primjer, determinantu možemo izračunati “razvijanjem po prvoj vrsti”.

Osobine determinanti

2. Zamjenom mjesta dviju kolona (vrsta), determinanta mijenja znak

Dokaz (n=2)

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Zahvaljujući ovoj osobini, determinantu možemo “razvijati po proizvoljnoj koloni” (na osnovu 1°: i vrsti).

Osobine determinanti

3. Ako sve elemente jedne kolone (vrste) pomnožimo nekim brojem, onda se i determinanta množi tim brojem

Dokaz (n=2)

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - ka_{21}a_{12} = k\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Iz osobine 3^o slijedi da se zajednički činilac elemenata kolone (vrste) može "izvući" ispred determinante. Specijalno, determinanta čiji su svi elementi neke kolone (vrste) nule, jednaka je nuli.

Osobine determinanti

4. Vrijednost determinante se ne mijenja ako jednoj koloni (vrsti) dodamo neku drugu kolonu (vrstu) pomnoženu proizvoljnim brojem k

Dokaz (n=2)

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}+ka_{12}a_{22}-a_{12}a_{21}-ka_{12}a_{22}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Osobine determinanti

Iz osobina 1^o, 2^o, 3^o i 4^o slijedi da je determinanta čije su dvije kolone (vrste) proporcionalne - jednaka nuli, kao i da za svaku determinantu možemo naći trougaonu determinantu čija je vrijednost jednaka datoj determinanti, tj. svaku determinantu "možemo svesti na trougaonu".

Zbir proizvoda elemenata proizvoljne vrste (kolone) i algebarskih komplemenata proizvoljne druge vrste (kolone) jednak je nuli.

Dokaz

Ako su A_{i1} algebarski komplementi elemenata prve kolone, onda, prema definiciji determinante, zbir

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \ldots + a_{n2}A_{n1}$$

možemo zapisati u obliku determinante

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \\ \\ a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kako ima dvije jednake kolone, to je dati zbir jednak nuli. Iz osobina 1° i 2° slijedi da isto zapažanje važi i ako uzmemo algebarske komplemente elemenata proizvoljne kolone (vrste) i neke druge kolone (vrste)

PRIMJER

Determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Osobina 3

Osobina 4

svesti na trougaonu.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \; (-4) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & -18 \end{vmatrix} \; (2)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -22 & -36 \end{vmatrix} \quad (11) \quad = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix}$$

Zbog osobine 3 u prethodnom koraku

Osobina 4

$$= \frac{1}{2} 1 \cdot 2 \cdot (-25) = -25$$

INVERZNA MATRICA

Za kvadratnu matricu A kažemo da je **regularna** ako je njena determinanta različita od nule.

Matrica A^{-1} je inverzna (regularnoj) matrici A ako je

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

INVERZNA MATRICA

Teorema: Neka je A regularna matrica reda n, E jedinična matrica istoga reda i A′ matrica transponovana matrici algebarskih komplemenata elemenata matrice A. Tada je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A'$$

Dokaz

Dokazaćemo da je: $$\frac{1}{\det A}\cdot A'\cdot A = E$$

Dokaz ćemo izvesti za n=3. $$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \mathrm{a}_{13} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \mathrm{a}_{23} \\ \mathrm{a}_{31} & \mathrm{a}_{32} & \mathrm{a}_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(\det A\right)^{-1}\cdot A\cdot A' = \left(\det A\right)^{-1}\cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\det A}\cdot \begin{bmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A \end{bmatrix}$$

Dijagonalni elementi dobijene matrice su zbirovi proizvoda elemenata i-te vrste ($i = 1,2,3$) i njihovih algebarskih komplemenata elemenata neke druge vrste, tj. jednaki su nuli (3.2.), pa je

$$(\det \mathrm{A})^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{A}' = (\det \mathrm{A})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \det \mathrm{A} & 0 & 0 \\ 0 & \det \mathrm{A} & 0 \\ 0 & 0 & \det \mathrm{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{E}$$

Na isti način se dokazuje da je i

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot A' = E$$

PRIMJER

Determinanta matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

je $\det A = 24 \neq 0$, p data matrica ima inverznu

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 18 & -7 & -1 \\ -12 & 10 & -2 \\ -6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Skup jednačina

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \qquad (*) \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

gdje su a_{ij}, b_j, i = 1,2,...,n; j = 1,2,...,m realni brojevi zovemo **sistemom od m jednačina sa n nepoznatih**. Brojevi aij su **koeficijenti**, x_i - nepoznate i bj - slobodni članovi sistema.

Ako su slobodni članovi sistema nule, tj.

$$b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$$

za sistem kažemo da je **homogen**, a ako je m = n za sistem kažemo da je **kvadratni** ili da je sistem sa istim brojem - n - jednačina i nepoznatih.

Rješenjem sistema zovemo svaku uređenu n-torku $(a_1, a_2, ..., a_n)$ realnih br. čijom zamjenom umjesto nepoznatih sve jednačine (*) postaju identiteti.

Za sistem (*) kažemo da je **saglasan**, ako ima rješenje i da je **nesaglasan** ako nema nijedno rješenje.

Primjeri

Primjer 1. Sistem

$2x + y + z = 1$

$x - y + 3z = -10$

je saglasan jer, zamjenom nepoznatih x, y, z koordinatama 1, 2, -3 uređene trojke (1, 2, -3), date jednačine prelaze u identitete.

Primjer 2. Sistem

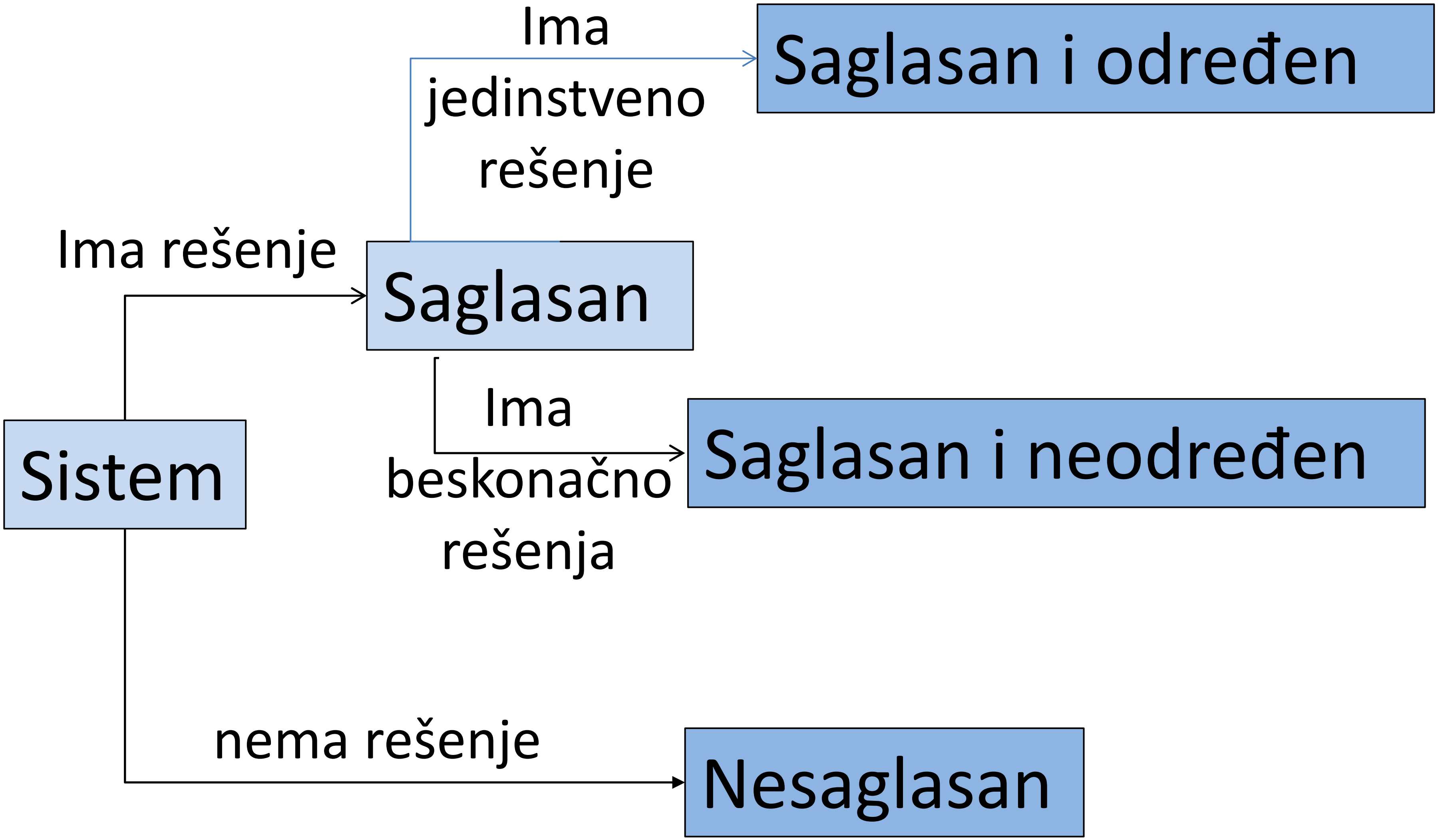
$x + y = 4$

$x + y = 0$

je nesaglasan, jer nijedan par realnih brojeva ne ispunjava uslov da je njihov zbir istovremeno jednak i broju 4 i broju 0.

Kako uređena n-torka (0, 0, ..., 0) zadovoljava proizvoljni homogeni sistem od n nepoznatih, to svaki homogeni sistem ima bar jedno rješenje (uređenu n-torku čije su sve koordinate nula), dakle, saglasan je. Rješenje (0, 0, ..., 0) zove se **trivijalno** rješenje homogenog sistema.

Za saglasan sistem koji ima (tačno) jedno rješenje kažemo da je **određen**, a za saglasan sistem koji ima beskonačno mnogo rješenja - da je **neodređen**


Ima jedinstveno rešenje
Saglasan i određen
Ima rešenje
Saglasan
Ima beskonačno rešenja
Saglasan i neodređen
Sistem
nema rešenje
Nesaglasan

Ako uvedemo oznake:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

onda, obzirom na definiciju proizvoda matrica, sistem $(*)$ možemo zapisati u obliku **matrične jednačine**
$A \cdot X = B$

Matricu A zovemo **matricom sistema**, matricu X - **matricom nepoznatih**, i matricu B - **matricom slobodnih članova**.

KVADRATNI SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Matrična jednačina koja odgovara sistemu za slučaj $m = n$, ima oblik

$$A \cdot X = B,$$

gdje je A kvadratna matrica reda n, a X i B su matrice tipa $n \times 1$. Ako je A regularna matrica, onda postoji njoj inverzna matrica A^{-1}. Množeći lijevu i desnu stranu matrične jednačine sa A^{-1}, dobijamo:

$$A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1}B$$

odakle, poslije primjene asocijativnog zakona, slijedi da je:

$$(A^{-1}A) \cdot X = A^{-1}B$$

Kako je $A^{-1}A = E$ i $E \cdot X = X$, dobijamo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

odakle, na osnovu definicije jednakosti matrica, dobijamo nepoznate sistema:

$$x_1 = (\det A)^{-1}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n)$$

$$x_2 = (\det A)^{-1}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = (\det A)^{-1}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n)$$

Izraz

$$A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n \equiv \det A_i$$

se zove **determinanta nepoznate $\mathbf{x_i}$** i, očigledno, dobija se ako u determinanti sistema koeficijente nepoznate x_i zamijenimo slobodnim članovima. Uz takve oznake, biće

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, i = 1,2,\ldots,n$$

Kramerove formule.

Primjer

Kramerovim formulama riješiti sistem linearnih jednačina

2x - 3y = 1

3x - 6y = 0

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -3$$

$$D_x = \det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -6 \qquad D_y = \det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-6}{-3} = 2; \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-3}{-3} = 1$$

EKVIVALENTNI SISTEMI JEDNAČINA. GAUSOV SISTEM JEDNAČINA

- Za dva sistema linearnih jednačina po istim nepoznatima kažemo da su **ekvivalentni** ako su im skupovi rješenja isti.
- **Elementarnim transformacijama** sistema linearnih jednačina zovemo:
  - Zamjenu mjesta (redosleda) jednačina
  - Množenje lijeve i desne strane nenultim brojem
  - Dodavanje lijevoj i desnoj strani jednačine (kažemo i: dodavanje jednačini) neke druge jednačine pomnožene proizvoljnim brojem
  - Dopisivanje ili ispuštanje proizvoljnog broja identiteta.

- Za sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih kažemo da je **trapezni** ili **Gausov**, ako je matrica tog sistema trapezna, tj.: ako je u nekoj jednačini prvi nenulti koeficijent uz nepoznatu x_k, onda sledeća jednačina uz nepoznate $x_1......x_k$ ima keoficijente jednake nuli.

Primjer:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \qquad\qquad\qquad + 7x_5 + x_6 &= 1 \\
x_3 + 2x_4 \qquad\qquad - 3x_6 &= 2 \\
5x_4 - x_5 \qquad\qquad &= 0 \\
x_5 + 2x_6 &= 3
\end{aligned}
$$

- U posljednjoj jednačini Gausovog sistema su ili svi koeficijenti nule ili ima nenultih, tj. posljednja jednačina ima jedan od sledećih oblika:
- 1) $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_m = b_m$, odnosno $0 = b_m$
- 2) $a_{mr}x_r + a_{m,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$,
  $r \in \{1,2,\ldots,n\}$, $a_{mr} \neq 0$.

- U slučaju 1) je ili $b_m = 0$ - tada je ta jednačina identitet pa rješenje sistema ne zavisi od nje (tj. ta jednačina se može odbaciti) - ili je bm ≠ 0, pa je sistem nesaglasan.
- U slučaju 2) dijeleći poslednju jednačinu sa nekim nenultim koeficijentom, na primjer, koeficijentom a_{mr}, nepoznatu x_r možemo izraziti preko nepoznatih $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$. Očigledno je da je u ovom slučaju dati sistem saglasan i zadovoljen za proizvoljne vrijednosti nepoznatih $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$. Zamjenom te nepoznate u prethodne jednačine sistema dobijamo sistem koji ima jednu jednačinu i jednu nepoznatu manje. Postupak se nastavlja analogno.

- Ako je Gausov sistem saglasan, za nepoznate kojima možemo davati proizvoljne vrijednosti kažemo da obrazuju **sistem slobodnih nepoznatih**, za razliku od preostalih, koje, tada, obrazuju **sistem baznih nepoznatih**.
- Saglasni sistem koji ima slobodnih nepoznatih ima beskonačno mnogo rješenja, tj. neodređen je. Skup svih rješenja neodređenog sistema zove se **opšte rješenje**, a elementi tog skupa su **partikularna** rješenja sistema.
- Elementarnim transformacijama proizvoljnom sistemu linearnih jednačina možemo naći ekvivalentan Gausov sistem (kažemo i: transformisati u Gausov sistem), pa date definicije važe i za proizvoljan saglasni sistem.

Primjer

Sistem
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$
transformisati u Gausov, a zatim riješiti.

Rješenje: Množeći prvu jednačinu sa (–2) i dodajući drugoj, a zatim sa (–1) i dodajući trećoj, dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -3x_2 - x_3 &= -9 \\ 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Množeći, sada, drugu jednačinu sa 2, a treću sa 3, i sabirajući ih, dobijamo Gausov sistem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -3x_2 - x_3 &= -9 \\ -5x_3 &= -15 \end{aligned}$$

Iz poslednje jednačine slijedi da je $x_3 = 3$.

Zamjenom u prethodnoj jednačini dobijamo da je $x_2 = 2$, a zamjenom u prvoj, da je $x_1 = 1$

Rješenje $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ je jedino rješenje Gausovog, pa i njemu ekvivalentnog (datog) sistema. Prema tome, dati sistem je saglasan i određen.

RANG MATRICE. EKVIVALENTNE MATRICE

- Neka je A data matrica tima $m\times n$ i k prirodan broj, $k \le \min(m,n)$. Elementi koji pripadaju presjeku proizvoljnih k vrsta i k kolona određuju kvadratnu matricu. Determinantu te matrice zovemo **minorom** reda k date matrice. Matrica A ima minore reda 1,2,...,m odnosno reda 1,2,...,n zavisno od toga da li je $m < n$ ili $m > n$. Neka je r red minora M koji ispunjava uslove:
- $M \neq 0$ i
- Svi minori reda većeg od r jednaki su nuli.
- Broj r, tada, zovemo **rangom** matrice A, oznaka r(A), a minor M - **baznim** minorom matrice A.

Primjer

- Najveći mogući red minora matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

je 3. No, svi minori trećeg reda su jednaki nuli (provjeriti) pa je r(A) < 3, tj. r(A) ≤ 2. Minor, na primjer,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Pa je rang 2!

Elementarne transformacije

1. zamjenu mjesta dvije vrste (kolone),
2. množenje elemenata neke vrste (kolone) brojem različitim od nula,
3. dodavanje elementima jedne vrste (kolone) odgovarajućih elemenata proizvoljne druge vrste (kolone) pomnoženih istim brojem.

- Ako je matrica B dobijena elementarnim transformacijama matrice A, onda za matrice A i B kažemo da su **ekvivalentne** i pišemo $A \sim B$.
- **ekvivalentne matrice imaju isti rang** !
- Rang matrice je jednak broju nenultih vrsta ekvivalentne trapezne matrice.

Primjer

Odrediti rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ -3 & -4 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje

Matrici A ćemo naći ekvivalentnu matricu trapeznog oblika primjenom sledećih elementarnih transformacija: 1^o zamjenom mjesta prve i treće vrste, 2^o dodavanjem drugoj vrsti prve pomnožene sa (–3) i trećoj vrsti - prve pomnožene sa 2, 3^o dodavanjem druge vrste trećoj, tj.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ -3 & -4 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & -4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad (3) \quad (2)$$

$$\sim\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -9 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{bmatrix} \quad (+) \quad \sim\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -9 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Broj nenultih vrsta dobijene trapezne matrice je 2, pa je r(A) = 2.

KRONEKER - KAPELIJEVA TEOREMA

- Neka je U matrica dobijena dopisivanjem kolone slobodnih članova matrici A sistema (*) sa prvog slajda.

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Matricu U zovemo **proširenom matrcom** sistema (*).

Kroneker-Kapelijeva teorema:

- Sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih je saglasan ako i samo ako je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice, tj. $r(A) = r(U)$. Ako je, pritom, $r = n$ sistem je određen, ako je $r < n$ sistem je neodređen i bazni sistem nepoznatih obrazuju one nepoznate čiji koeficijenti određuju bazni minor. Ostale nepoznate obrazuju sistem slobodnih nepoznatih.

Dakle, sistem je nesaglasan akko $r(A) \neq r(U)$

Primjer. Diskutovati i riješiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+\ x_4\ &=1\\ x_1-2x_2+x_3-\ x_4\ &=-1\\ x_1-2x_2+x_3+ax_4&=5 \end{aligned}$$

u zavisnosti od parametra a.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & a & 5 \end{array}\right](-1) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 4 \end{array}\right]\cdot(-\frac{1}{2}) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 4 \end{array}\right](1-a) \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4+1-a \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5-a \end{array}\right] \qquad r\overline{A} = \begin{cases} 2, & a=5 \\ 3, & a\neq 5 \end{cases} \qquad rA = 2$$

Za $a\neq 5$ nema rešenja. Za $a=5$, iz druge jednačine $x_4=1$, a uvrštavajući taj rezultat u prvu dobija se $x_1-2x_2+x_3+1=1 \Rightarrow x_1=2x_2-x_3 \Rightarrow R=\{(x_1,x_2,x_3,1) \mid x_1=2x_2-x_3,\ x_2,x_3\in R\}$

VEKTORSKI PROSTOR

Neka je V dati skup i neka:

A) Svakom paru elemenata $x,y \in V$ odgovara element $x + y$ koji zovemo **zbirom** elemenata x i y pri čemu:

1. $x + y = y + x, \ \forall x,y \in V$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x,y,z \in V$
3. Postoji neutralni element $e \in V$, tj. $x+e = e+x=x, \ \forall x \in V$
4. Za svako $x \in V$ postoji suprotan element $(-x) \in V$, tj. $x + (-x) = e$,

B) Svakom pary (a,x) gdje je a realan broj, a $x \in V$, odgovara element $ax \in V$ koji zovemo **proizvodom** a i x i pri čemu je

5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall \alpha,\beta \in R, \forall x \in V$
6. $1 \cdot x = x, \forall x \in V$
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall \alpha \in R, \forall x,y \in V$
8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall \alpha,\beta \in R, \forall x \in V$

- Za skup V tada, kažemo da u odnosu na sabiranje elemenata i množenje realnim brojem obrazuje (realni) **vektorski prostor** i koristimo oznaku $(V, +, \cdot)$. Elemente vektorskog prostora zovemo **vektorima**, a realne brojeve - **skalarima**.
- Iz osobina 1-8 mogu se izvesti sledeća tvrđenja:
- $0 \cdot x = e$, $(-1) \cdot x = -x$, $ax = e \Rightarrow a = 0$ ili $x = e$
- Neutralni vektor e zovemo i **nula-vektorom** i, obično, označavamo sa "0" pretpostavljajući da je jasno da li se u nekom tekstu govori o neutralnom vektoru e ili realnom broju 0.

Primjeri

- $(R,+,\cdot)$ je vektorski prostor
- $(R^n,+,\cdot)$ je vektorski prostor, gdje je R^n skup urećebih n-torki
- $(\mathcal{M}_{nxm},+,\cdot)$ je vektorski prostor, gdje je $\mathcal{M}_{nxm}$ skup matrica tipa nxm
- $(\mathcal{P}_n,+,\cdot)$ je vektorski prostor, gdje je $\mathcal{P}_n$ skup svih polinoma stemena $\leq n$

VEKTORSKI PROSTOR UREĐENIH m-TORKI REALNIH BROJEVA

- U skupu R^m uređenih m-torki definišemo operaciju sabiranja uređenih m-torki i proizvod uređene m-torke realnim brojem na sledeći način:
- $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_m + y_m)$, $x,y \in R^m$
- $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_m)$, $a \in R$, $x \in R^m$
- Koristeći ove osobine operacija u skupu realnih brojeva lako se provjerava da je $(R^m, +, \cdot)$ R^m vektorski prostor. Neutralni element za sabiranje je uređena m-torka čije su sve koordinate nula, tj. $e = (0, 0, ..., 0)$; dok je elementu $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ suprotan element $(-x_1, -x_2, ..., -x_m) = -x$.

LINEARNA NEZAVISNOST VEKTORA. BAZA.

- Neka su $c_1, c_2, \ldots, c_k$ skalari (realni brojevi) i $a_1, a_2, \ldots, a_k$ vektori. Zbir proizvoda vektora a_i i odgovarajućih skalara c_i zovemo **linearnom kombinacijom** vektora a_i i označavamo sa

$\boldsymbol{l}(a_1$, a2, ..., ak) ili sa $\boldsymbol{l}$, tj.

- $\boldsymbol{l}(a_1, a_2, \ldots, a_k) \equiv \boldsymbol{l} = c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_ka_k.$
- Za sistem vektora $a_1, a_2, \ldots, a_k$ vektorskog prostora V kažemo da je **linearno nezavisan**, ako je proizvoljna linearna kombinacija tih vektora jednaka nuli samo onda kada su svi skalari c_i nule.
- Za sistem vektora koji nije linearno nezavisan kažemo da je **linearno zavisan**.

Baza vektorskog prostora

- Neka je dat sistem vektora $a_1, a_2, ..., a_k$ vektorskog prostora V koji zadovoljava:
  1. Sistem je linearno nezavisan.
  2. Proizvoljni vektor $x \in V$ se može predstaviti kao linearna kombinacija vektora sistema
- Tada kažemo da vektori $a_1, a_2, ..., a_k$ čine bazu vektorskog prostora V.
- Broj elemenata baze zove se **dimenzija** vektorskog prostora.
- Primjeri...

LINEARNA ZAVISNOST I SISTEMI JEDNAČINA

- Neka je dato n vektora $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^m$:
- $a_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})$, $a_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})$, ..., $a_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$.
- Ispitivanje linearne nezavisnosti datoga sistema svodi se na to da se utvrdi za koje je skalare $x_1, \ldots, x_n$ linearna kombinacija $\boldsymbol{l} = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n$ jednaka nuli.

Primjeri

- (1,2) i (2,4) su linearno zavisni
- Jer je $2\cdot(1,2) + (-1)\cdot(2,4) = (0,0)$ i mpr $c_1=2\neq 0$
- (1,0) i (0,1) su linearno nezavisni
- Jer je $\alpha\cdot(1,0) + \beta\cdot(0,1) = (0,0) \Rightarrow$
- $(\alpha, \beta) = (0,0) \Rightarrow$
- $\alpha=0$, $\beta=0$

- Zamjenjujući vektore a_i u jednačini

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = 0$$

Dobija se sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

- ispitivanje linearne nezavisnosti sistema vektora svodi se na ispitivanje broja rješenja homogenog sistema jednačina
- slično, predstavljanje jednog vektora, preko drugih vektora, svodi se na ispitivanje nehomogenog sistema (koordinate tog vektora predstavljaju kolonu slobodnih članova)

Primjer. Vektor x=(1, -1, 5) predstaviti kao linearnu kombinaciju vektora (kad je to moguće) x_1=(1, 1, 1) , x_2=(-2, -2, -2) , x_3=(1, 1, 1), x_4=(1, -1, a) u zavisnosti od parametra a.

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = x \Leftrightarrow \begin{aligned} c_1 - 2c_2 + c_3 + c_4 &= 1 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 - c_4 &= -1 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 + ac_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & a & 5 \end{array}\right](-1) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 4 \end{array}\right]\cdot(-\frac{1}{2}) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 4 \end{array}\right](1-a) \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4+1-a \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5-a \end{array}\right] \qquad r\overline{A} = \begin{cases} 2, a = 5 \\ 3, a \neq 5 \end{cases} \qquad rA = 2$$

Za $a \neq 5$ nema rešenja, pa predstavljanje nije moguće. Za a=5, c_4=1, $c_1=2c_2-c_3$, $c_2, c_3 \in R$, pa ima beskonačno mnogo predstavljanja. Npr. za $c_2=1$, $c_3=1 \Rightarrow c_1=1 \Rightarrow x=x_1+x_2+x_3+x_4$

Primjer

- Vektor x = (4,6,5) predstaviti kao linearnu kombinaciju vektora
- x_1=(1,2,2)
- x_2=(1,3,-1)
- x_3=(-1,2,a)

- U zavisnosti od parametra a.

Vektorski prostor

- Skup svih dvodimenzionih vektora koji generišu različite linearne kombinacije dva nezavisna vektora u i v čini dvodimenzioni *vektorski prostor* (R^2).
- Dva linearno nezavisna vektora *u* i *v* čine jednu *bazu*

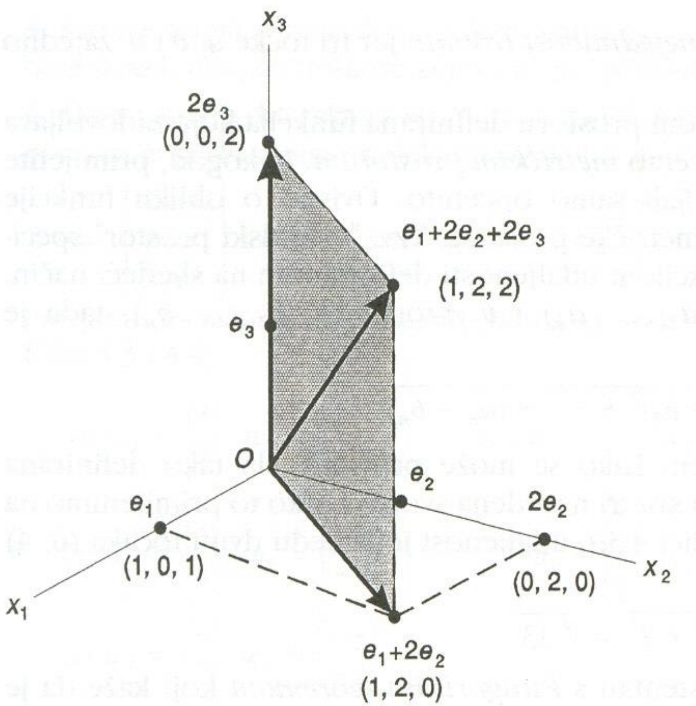
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dvodimenzionog prostora. Npr, *jedinični vektori*

$$e_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora

- Uopštenje: *n*-dimenzioni prostor je skup svih *n*-dimenzionih vektora (realnih brojeva) – *Euklidski prostor.*
- Udaljenost između 2 vektora *u* i *v* ili tačke $(a_1, a_2, ..., a_n)$ i $(b_1, b_2, ..., b_n)$:



$$d(u,v) = 0 \qquad \textit{(za u=v)}$$

$$d(u,v) = d(v,u) > 0 \qquad \textit{(za u}\neq\textit{v)}$$

$$d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \qquad \textit{(za w}\neq\textit{u,v)}$$

$$d(u,v) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$$

$$d(u,v) = \sqrt{(u-v)'(u-v)}$$

Hiperravan, poluprostor

- Hiperravan u prostoru R^n
  - $ax + by + c = 0$ (u ravni R^2)
  - $ax + by + cz + d = 0$ (u prostoru R^3)
  - $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0$ u prostoru R^n – hiperravan
  - $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+a_0$
  - $F>0$; $F\geq 0$; $F<0$; $F\leq 0$;

•**Hiperravan u prostoru R^n** je skup svih tačaka - tj. uređenih n-torki $(x_1,x_2,...,x_n)$ - tog prostora čije koordinate zadovoljavaju jednačinu oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_0 = 0$$

pri čemu bar jedan od koeficijenata

a_i, $i = 1,2,...,n$ nije nula

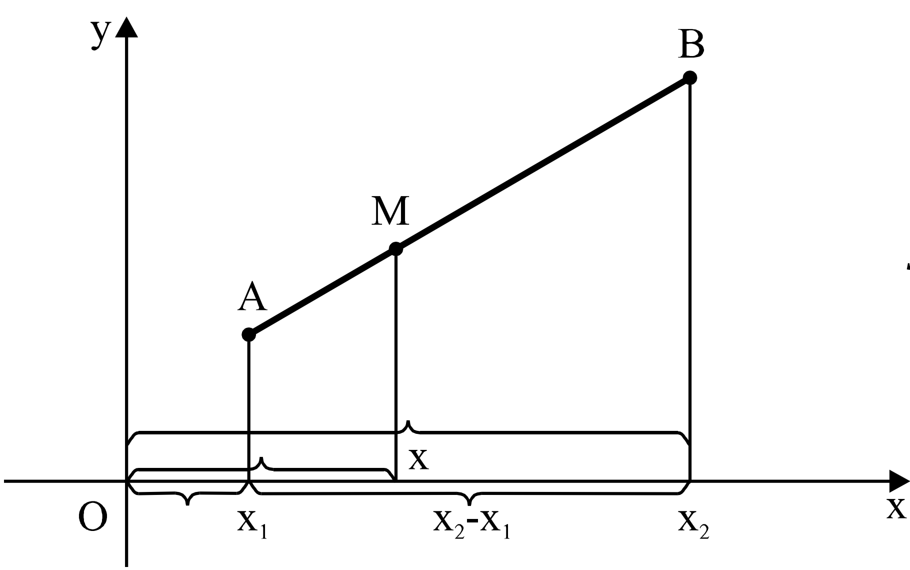
•Hiperravan dijeli prostor R^n na dva poluprostora

•R^n=P+N+H

- $F(x_1,x_2,...,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+a_0$
- H : $F=0$
- P : $F>0$ ($F\geq 0$)
- N : $F<0$ ($F\leq 0$)
- Sa $>$, $<$ otvoreni poluprostori
- Sa $\geq$, $\leq$ zatvoreni poluprostori

DUŽ U PROSTORU R^n - KONVEKSAN SKUP

- Neka su $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$ krajevi duži AB u Dekartovoj ravni Oxy



$$x = x_1 + r(x_2 - x_1) = (1 - r)x_1 + rx_2$$
$$y = y_1 + r(y_2 - y_1) = (1 - r)y_1 + ry_2$$

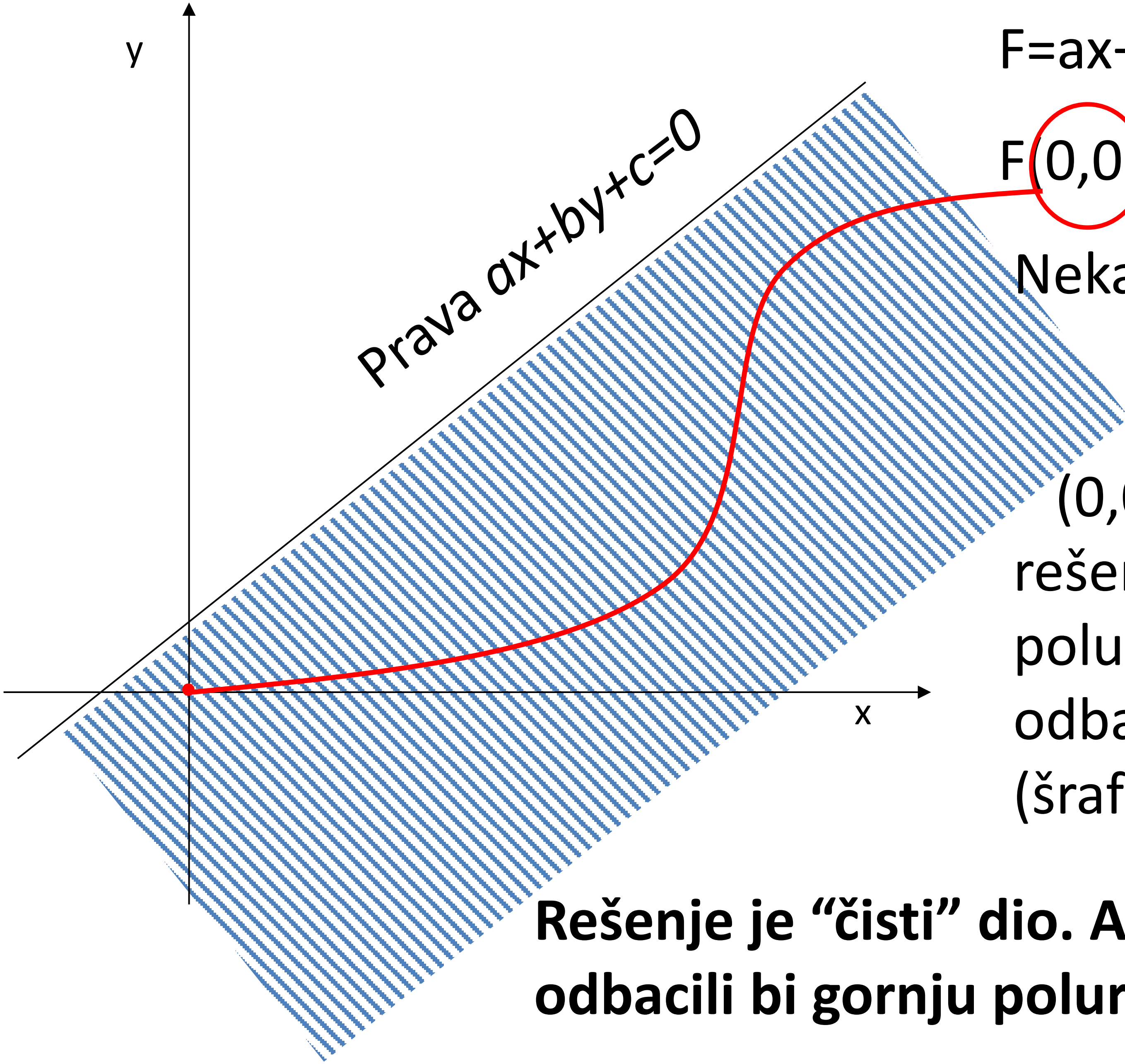
Duž

- **Duž sa krajevima a = $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ i b = $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ u prostoru R^n** je skup svih tačaka $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ čije su koordinate:
- $x_1 = a_1 + r(b_1 - a_1)$, $x_2 = a_2 + r(b_2 - a_2)$, ...,
  $x_n = a_n + r(b_n - a_n)$, $r \in [0,1]$.
- Za r = 0 ili r = 1 dobijamo krajeve, a za $r \in (0,1)$ **unutrašnje** tačke duži. Duž čiji se krajevi poklapaju zove se **nulta** duž.

- Za skup $K \subset R^n$ kažemo da je **konveksan** ako sa svake svoje dvije tačke sadrži i duž čiji su krajevi te tačke. Po definiciji, prazan skup je konveksan.
- Neki konveksni skupovi: hiperravan, poluprostor, trougao, duž, prava...

Linearne nejednačine

- **Linearna nejednačina** po n nepoznatih $x_1,\ldots,x_n$ ima opšti oblik
- $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n \geq b$ (ili: $>b$, $<b$, $\leq b$)
- Za slučaj n = 2 nejednačinu (1), koja, tada, ima oblik $ax + by + c \geq 0$ možemo riješiti i grafički: u Dekartovoj ravni Oxy naći ćemo skup svih tačaka čije koordinate zadovoljavaju tu nejednačinu.



$F=ax+by+c$

$F(0,0)=c$

Neka je, npr

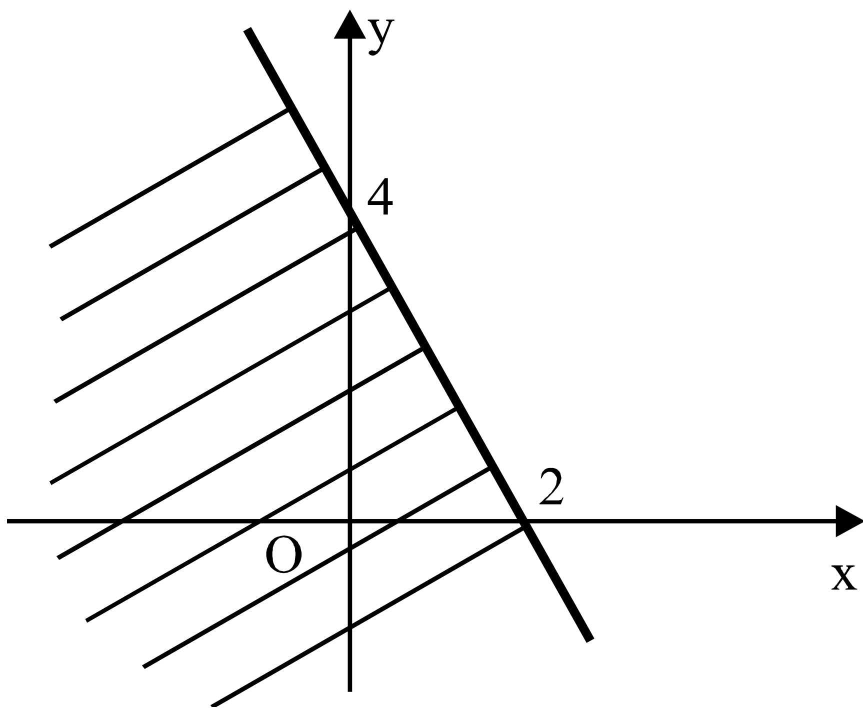
$F(0,0)=c<0 \Rightarrow$

(0,0) ne pripada rešenju, pa tu poluravan odbacujemo (šrafirani dio).

Rešenje je "čisti" dio. Ako je c>0 odbacili bi gornju poluravan

Primjer

- Grafički riješiti nejednačinu $2x + y - 4 \geq 0$.



$F(x,y) = 2x + y - 4$ Biramo tačku koja **ne pripada** pravoj $F=0$, npr $(0,0)$. Kako je $F(0,0)=-4<0$, to $(0,0)$ **ne pripada** rešenju, pa tu poluravan odbacujemo. Rešenje je "čisti" dio.

- Sistem linearnih nejednačina se rešava tako što se svaka nejednačina riješi posebno. Rešenje sistema je presjek rešenja pojedinih nejednačina tog sistema. Npr. rešenje sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 6 &\leq 0 \\ x \qquad\quad &\geq 0 \\ x - \ y \qquad &\leq 0 \end{aligned}$$

je trougao na slici